

APLICACIÓN DEL MODELO BLACK LITTERMAN A LA OPTIMIZACION DE PORTAFOLIOS DEL BCB¹

Oscar Martínez

¹ El presente documento no necesariamente refleja la visión del BCB y de sus autoridades. Sus conclusiones y/u omisiones son de exclusiva responsabilidad del autor

APLICACIÓN DEL MODELO BLACK LITTERMAN A LA OPTIMIZACION DE PORTAFOLIOS DEL BCB

Oscar Martínez

Analista de Inversiones

Gerencia de Operaciones Internacionales

Banco Central de Bolivia

Resumen:

La optimización de portafolios es un tópico importante en la toma de decisiones en la administración de portafolios de inversión. Esta optimización ha sido incorporada como un elemento que coadyuva en la definición de los lineamientos de inversión de las reservas internacionales dentro del Banco Central de Bolivia. El presente documento expone el modelo de optimización de portafolios desarrollado por Fisher Black y Robert Litterman (1992) destacando los beneficios que se obtienen en términos de diversificación y flexibilidad, respecto al modelo de optimización de portafolios desarrollado por Harry Markowitz (1952), a través de la aplicación a los portafolios administrados por el BCB.

Abstract:

Portfolio Optimization is one of the central topics in decision taking in Portfolio Management. This optimization framework has been incorporated as an element that aids the foreign exchange reserves investment guidelines definition within the Central Bank of Bolivia. This paper exposes the portfolio optimization model developed by Fisher Black and Robert Litterman (1992) in order to show the benefits in terms of diversification and flexibility, compared to the portfolio optimization model developed by Harry Markowitz (1952), through the empirical application to the portfolios managed by the BCB.

Palabras clave: Retornos de Equilibrio, Pesos de Equilibrio, Matriz de Varianzas y Covarianzas, Prima de Mercado, Coeficiente de Aversión al Riesgo, Retornos Black – Litterman.

Clasificación JEL: C1, C6

INTRODUCCION

Toda decisión económica implica la asignación de recursos escasos ante muchas necesidades de manera que la satisfacción o utilidad obtenida sea la máxima. En tal sentido, la optimización de portafolios puede entenderse como la asignación eficiente del riesgo ante alternativas de inversión diversas en busca de obtener la máxima utilidad posible.

Harry Markowitz (1952), aplicando el sentido económico de la optimización de utilidad, estableció las bases cuantitativas de la teoría moderna de portafolios cuya complejidad ha ido creciendo con el transcurrir de los años y el desarrollo de los mercados financieros. Por ello, el presente trabajo se centra en la aplicación a los portafolios administrados por el Banco Central de Bolivia (BCB) del enfoque de optimización de portafolios desarrollado por Fischer Black y Robert Litterman (1992), que supone una mejora al enfoque tradicional de Markowitz. Adicionalmente, el modelo Black-Litterman es enriquecido a través de la metodología de Idzorek (2004) que flexibiliza aún más la inclusión de perspectivas en el modelo y el contraste de Fusai-Meucci (2003) que permite validar la consistencia de las perspectivas.

La sección 1 describe la composición y evolución de las reservas internacionales del BCB con el objeto de contextualizar el estudio llevado a cabo. La sección 2 explica la interrelación del enfoque bayesiano de la optimización de portafolios y su interrelación con el modelo de Black – Litterman para corregir algunas de las falencias del modelo de optimización de portafolios de Markowitz. La sección 3 muestra el contraste de los resultados aplicando los enfoques de Markowitz y el de enfoque Black – Litterman. Finalmente en la sección 4 se proporcionan las conclusiones y recomendaciones del análisis.

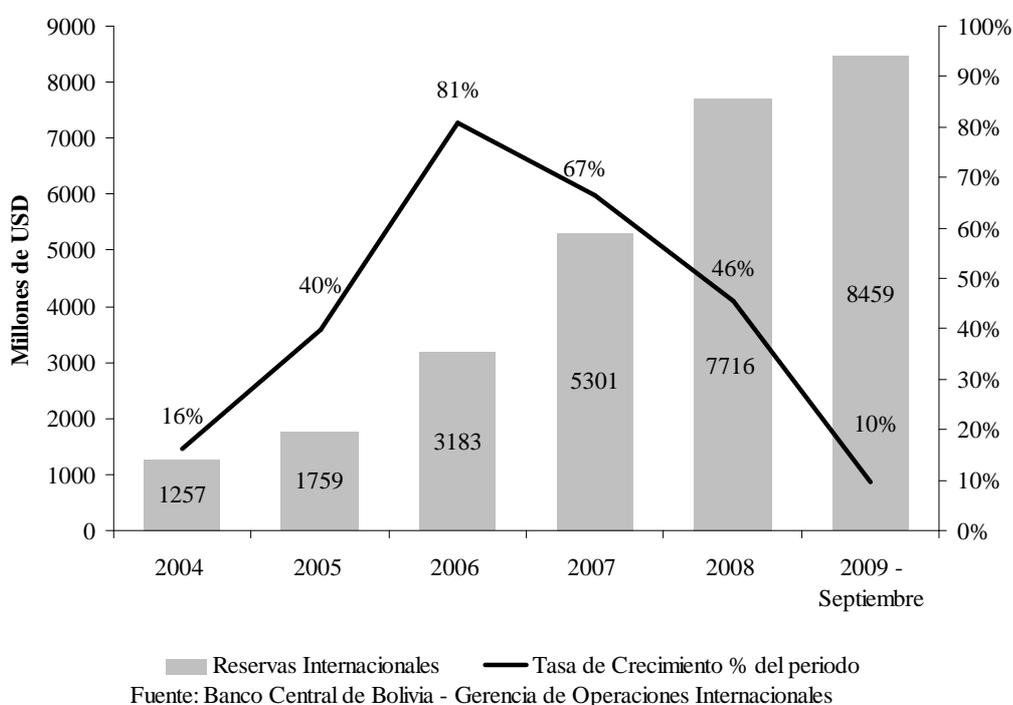
1. EVOLUCION Y COMPOSICION DE LAS RESERVAS INTERNACIONALES DEL BCB

Las reservas internacionales son los recursos financieros en divisas con los cuales cuenta un país. En el caso específico de Bolivia, sirven para sostener la política cambiaria, garantizar los pagos de los bienes importados, efectuar pagos del servicio de la deuda y respaldar la estabilidad del sistema financiero. Las reservas internacionales

del BCB están compuestas por dólares americanos (USD), oro, euros (EUR) y derechos especiales de giro (DEG²).

Las reservas internacionales que administra el BCB³ experimentaron un crecimiento acelerado desde el 2005 (USD 1.759 millones) hasta septiembre de 2009 (USD 7.716 millones), comportamiento que se explica principalmente por una balanza comercial favorable como resultado de los ingresos por exportaciones de gas, desembolsos de deuda externa, remesas familiares del exterior y por transferencias del sector exportador. El gráfico 1.1 refleja la evolución histórica del crecimiento anual porcentual y el crecimiento nominal de las reservas internacionales.

Gráfico 1.1 Evolución de las Reservas Internacionales 2004 – 2009 (Septiembre)



Al 30 de septiembre de 2009, las reservas internacionales ascendieron a USD 8.459 millones. Estas reservas se componen de reservas monetarias internacionales por USD 7.538 millones que representa el 89%, y reservas de oro por USD 920 millones que representa el 11% (Ver Cuadro 1.1).

² El monto de DEG que posee el BCB corresponde a la cuota que el FMI asigna a Bolivia por ser país miembro.

³ Las reservas disponibles para inversión no incluyen el Tramo de Inversión del FMI.

Las reservas monetarias internacionales están compuestas por el Capital de Trabajo y el Capital de Inversión. El Capital de Trabajo representa el 2% de las reservas internacionales, el capital de inversión el 88% y el oro representa un 11%. El capital de inversión tiene como finalidad incrementar el retorno de la inversión de las reservas una vez que se cumplan los criterios de seguridad, liquidez y preservación de capital. Está compuesto por los portafolios de Liquidez, de Depósitos, de Inversión y Euro.

Las reservas de oro alcanzan a 28.3 toneladas y su volumen se ha mantenido sin variación desde el proceso de refinación realizado el año 1999; mientras que su valor se ha ido incrementando desde el 2006 por la subida constante del precio del oro.

Cuadro 1.1 Estructura de las Reservas Internacionales 2006 - 2009 (Septiembre)
(expresado en millones de USD)

	2006	2007	2008	2009 - Septiembre	Participación Porcentual
Capital de Trabajo	334,4	170,0	195,9	128,1	2%
Portafolio de Liquidez	300,6	504,8	4736,8	4727,2	56%
Portafolio de Depósitos	1225,1	2735,5	1938,4	1441,5	17%
Portafolio de Inversión	703,4	1088,8	0,0	0,0	0%
Portafolio Euro	0,0	0,0	0,0	980,3	12%
DEG's	40,2	42,3	42,3	261,3	3%
Capital de Inversión	2269,4	4371,4	6717,6	7410,3	88%
Reservas Monetarias	2603,7	4541,5	6913,5	7538,4	89%
Oro	579,8	759,9	802,6	920,2	11%
Total Reservas Internacionales	3183,5	5301,3	7716,1	8458,6	

Fuente: Banco Central de Bolivia – Gerencia de Operaciones Internacionales

La Ley de la República N° 1670 de 31 de octubre de 1995 (Ley del Banco Central de Bolivia) dispone que el BCB administre las reservas internacionales. Bajo este mandato, mediante Resolución de Directorio N° 080/2009 de 07 de julio de 2009 se aprobó el nuevo Reglamento⁴ para la Administración de las Reservas Internacionales.

Este Reglamento establece que trimestralmente se debe efectuar la asignación porcentual de los portafolios que conforman el capital de inversión (Liquidez, Inversión, Depósitos y Euro).

⁴ El BCB cuenta con Reglamento para la inversión de las reservas desde el año 1994. El Reglamento aprobado en julio de 2009 es la décima versión.

En la sección 3 se detallará la aplicación del modelo Black – Litterman para la determinación de la estructura referencial de los portafolios que componen el capital de inversión de las reservas internacionales del BCB para el 2009 bajo el actual contexto del mercado financiero internacional. Cabe resaltar que el modelo Black – Litterman es sensible a las expectativas que se tengan sobre los retornos de los portafolios del capital de inversión; es decir, expectativas diferentes producen resultados diferentes. Por ello la presente aplicación busca mostrar las ventajas del modelo Black – Litterman frente al modelo de Markowitz en términos de diversificación sin necesidad de incluir restricciones que permitan ajustar las soluciones extremas que produce el modelo de Markowitz.

2. EL ENFOQUE BAYESIANO DE OPTIMIZACION Y EL MODELO BLACK - LITTERMAN

Harry Markowitz (1952) definió las bases de la teoría moderna de portafolios que establece que los inversores deben tomar decisiones buscando la maximización del retorno esperado de su portafolio tomando en cuenta el riesgo, medido por la variabilidad de los retornos, y los retornos esperados de cada uno de los activos financieros; o viceversa, minimizar el riesgo de su portafolio buscando un retorno objetivo. Este razonamiento lleva implícitamente la maximización de la utilidad esperada, ya que los retornos de los portafolios son variables aleatorias, cuyo planteamiento se define como:

$$\begin{aligned} \max_w E[U(w' \mathbf{R}_{T+\tau})] &= \max_w \int U(w' \mathbf{R}_{T+\tau}) p_{T+\tau}(\mathbf{R}_{T+\tau} | \mu, \Sigma) d\mathbf{R}_{T+\tau} \\ \text{sujeto a } w' \mathbf{1} &= 1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Es decir, el portafolio óptimo o la asignación óptima w es aquella que maximiza la utilidad esperada del inversor en base a los retornos en el periodo futuro τ que a su vez son función de los parámetros μ (media de retornos) y Σ (matriz de covarianzas). Adicionalmente, el modelo asume que los retornos siguen una distribución normal multivariante con parámetros μ y Σ . Sin embargo, una consideración importante es que ni μ ni Σ son observables; es decir, no son datos, y por ello existe un riesgo de estimación en el cálculo de tales parámetros en base a datos históricos. Para salvar tales limitantes, es necesario incorporar el riesgo de estimación en tales parámetros al

problema original de optimización (2.1). En primer lugar, se redefine la probabilidad de obtener el vector de retornos futuros $\mathbf{R}_{T+\tau}$ de acuerdo a la siguiente relación:

$$p(\mathbf{R}_{T+\tau} | \mathbf{R}) \propto \int p(\mathbf{R}_{T+\tau} | \mu, \Sigma) p(\mu, \Sigma | \mathbf{R}) d\mu d\Sigma \quad (2.2)$$

donde \mathbf{R} representa los retornos disponibles hasta el periodo T y $p(\mu, \Sigma | \mathbf{R})$ la incertidumbre asociada a la estimación de μ y Σ . Combinando (2.2) y (2.1) se tiene:

$$\begin{aligned} \max_w E[U(w' \mathbf{R}_{T+\tau})] &= \max_w \int U(w' \mathbf{R}_{T+\tau}) p_{T+\tau}(\mathbf{R}_{T+\tau} | \mathbf{R}) d\mathbf{R}_{T+\tau} \\ \text{sujeto a } w' \mathbf{1} &= 1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Fischer Black y Robert Litterman (1992), a diferencia de Markowitz, consideraron que no es necesario que el inversionista provea un retorno esperado para cada activo. Simplemente, los activos en los que el inversionista no tiene una expectativa particular entran en el optimizador con su respectivo retorno de equilibrio.

En términos formales, incorporaron el riesgo de estimación en el vector de retornos medios esperados μ asumiendo como dada la matriz de covarianzas Σ , lo que mejora ampliamente el principal problema del modelo de Markowitz: el de asignaciones altamente concentradas en pocos activos. Para ello, tomaron en cuenta que el inversionista tiene información previa del parámetro μ en base a los retornos que proporciona el Modelo de Valoración de Activos (CAPM por sus siglas en inglés); es decir, asumiendo que el mercado se encuentra en equilibrio, el inversionista busca tomar como punto de partida los retornos implícitos de equilibrio que proporciona el modelo CAPM. Estos retornos implícitos de equilibrio surgen de:

$$\Pi = \beta(R_M - R_f) \quad (2.4)$$

que explícitamente señala que los retornos de equilibrio en exceso de la tasa libre de riesgo Π son proporcionales a la prima de mercado $(R_M - R_f)$. Esta proporcionalidad está dada por el vector de parámetros β , el cual es equivalente al cociente de la covarianza de los retornos de los distintos activos con el mercado y la varianza de este último. Es decir,

$$\beta = \frac{\Sigma w}{w' \Sigma w} \quad (2.5)$$

Reemplazando (2.5) en (2.4) se tiene el siguiente resultado:

$$\Pi = \frac{(R_M - R_f)}{w' \Sigma w} \Sigma w \quad (2.6)$$

donde el término $\frac{(R_M - R_f)}{w' \Sigma w}$ es el coeficiente de aversión al riesgo λ , con lo que se tiene la relación que determina los retornos en exceso de equilibrio.

$$\Pi = \lambda \Sigma w \quad (2.7)$$

El modelo Black – Litterman asume que el vector de retornos en exceso esperado es desconocido; sin embargo asume que (2.7) sirve como un buen punto de partida para estimar dicho vector. Por lo tanto,

$$\Pi = \mu + \varepsilon_{\Pi}, \quad \varepsilon_{\Pi} \sim N(0, \tau \Sigma) \quad (2.8)$$

El parámetro τ mide el grado de certidumbre que se tiene respecto a los retornos en exceso de equilibrio basados en (2.7). Si el grado de certidumbre es alto, τ será cercano a 0; de otra forma, τ será cercano a 1. Si la muestra de datos para calcular (2.7) es T , a medida que T incremente la certidumbre en la estimación de (2.7) será más alta⁵. Es decir,

$$\tau = \frac{1}{T} \quad (2.9)$$

Una vez determinado el punto de partida (retornos en exceso de equilibrio implícitos del modelo CAPM), el inversionista puede ajustarlos de acuerdo a sus expectativas. El modelo Black – Litterman propone la siguiente relación respecto a las expectativas sobre el vector de retornos μ .

$$\mathbf{q} = \mathbf{P}\mu + \varepsilon_{\mathbf{q}}, \quad \varepsilon_{\mathbf{q}} \sim N(0, \Omega) \quad (2.10)$$

⁵ Fabozzi Frank *et al.*, *Bayesian Methods in Finance* (New York: Wiley and Sons, 2008)

donde \mathbf{q} es el vector de expectativas sobre los retornos en exceso de n activos y \mathbf{P} es la matriz que considera los activos sobre los cuales se tiene expectativas. La incertidumbre en las expectativas se representa en la matriz Ω . Aplicando la técnica de mínimos cuadrados generalizados sobre (2.8) y (2.10), se obtiene el estimador μ_{BL} ⁶

$$\mu_{BL} = \left[(\tau \Sigma)^{-1} + \mathbf{P}' \Omega^{-1} \mathbf{P} \right]^{-1} \left[(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + \mathbf{P}' \Omega^{-1} \mathbf{q} \right] \quad (2.11)$$

con:

$$\text{var}(\mu_{BL}) = \left[(\tau \Sigma)^{-1} + \mathbf{P}' \Omega^{-1} \mathbf{P} \right]^{-1}$$

reformulando (2.11) en forma más intuitiva, se tiene

$$\mu_{BL} = \Pi + \tau \Sigma \mathbf{P}' (\Omega + \tau \mathbf{P} \Sigma \mathbf{P}')^{-1} (\mathbf{q} - \mathbf{P} \Pi) \quad (2.12)$$

Esta última relación expresa que si no se tienen visiones respecto a los retornos en exceso de los n activos, entonces se deberían tomar solamente los retornos en exceso de equilibrio Π , de lo contrario, existe una desviación respecto a los mismos cuya magnitud es función de las expectativas y la ponderación τ sobre las mismas.

El problema de optimización media – varianza puede ahora tomar como insumos el vector de retornos en exceso esperados μ_{BL} y la matriz de covarianzas Σ_{BL} que se define como la suma de la matriz de covarianzas de los activos Σ y la varianza del vector de retornos μ_{BL} , es decir:

$$\Sigma_{BL} = \Sigma + \text{var}(\mu_{BL}) \quad (2.13)$$

⁶ En el Apéndice A se muestra la derivación completa del estimador μ_{BL}

3. ANALISIS EMPIRICO

Para aplicar el modelo Black-Litterman a la asignación de activos en el Capital de Inversión del BCB, se consideraron los comparadores referenciales⁷ de los portafolios del capital de inversión. Los comparadores referenciales de los portafolios de Liquidez, Inversión, Depósitos y Euro son los índices de Merrill Lynch: G0B2 (Letras del Tesoro Americano de 3 a 6 meses), G1O2 (Notas del Tesoro Americano de 1 a 3 años), L7US (Tasa LIBOR a 6 meses) y G0FB (Letras del Tesoro Francés de 0 a 1 año). Este último expresado en dólares americanos (USD) y sin cobertura cambiaria. Los datos considerados en el modelo fueron los retornos anuales desde 1999 hasta 2008.

3.1. Pesos de equilibrio

Uno de los principales insumos de la relación (2.6) son los pesos de equilibrio que se definen como la asignación óptima que iguala la oferta y demanda de activos financieros, por lo que se busca encontrar los retornos implícitos que satisfacen tal igualdad. El Cuadro 3.1 refleja los pesos de mercado respectivos al 31 de diciembre 2008 de cada índice, entendiéndose como peso de mercado al valor de mercado del índice en particular respecto a la suma total del valor de mercado de los índices⁸.

Cuadro 3.1 Pesos de Mercado al 31 de diciembre 2008

INDICE	2008	Promedio 1999 - 2008
G0B2	34%	25%
G1O2	50%	53%
G0FB	3%	2%
L7US	13%	20%

⁷ El Reglamento para la Administración de las Reservas Internacionales aprobado el 07 de julio de 2009 define los comparadores referenciales (benchmarks) de cada uno de los portafolios del capital de inversión.

⁸ El comparador referencial del portafolio de depósitos (L7US) no posee valor de mercado por lo que se tomó en cuenta el total de papeles comerciales del sector financiero emitidos en dólares (uno de los principales instrumentos de inversión del portafolio de depósitos). Este registro lo lleva a cabo la Reserva Federal de los Estados Unidos.

3.2. Retornos de equilibrio total

Para la obtención de los retornos de equilibrio de acuerdo a (2.6), uno de los insumos que falta considerar es el coeficiente de aversión al riesgo λ . Este coeficiente se lo obtiene como el cociente del exceso de retorno del portafolio de mercado respecto al rendimiento del activo libre de riesgo⁹ y la varianza del portafolio de mercado¹⁰. Finalmente, la matriz de varianzas - covarianzas de los retornos anuales de los índices es estimada tomando en cuenta las consideraciones expuestas en Litterman *et al* (2003)¹¹. El Cuadro 3.2 muestra los retornos en exceso de equilibrio obtenidos Π .

Cuadro 3.2 Resumen Resultados de Equilibrio y Matriz de Correlaciones

	G0B2	G1O2	G0FB	L7US
G0B2	1.00	0.55	0.15	0.66
G1O2		1.00	0.14	0.19
G0FB			1.00	0.20
L7US				1.00
Π	0.27%	1.22%	4.16%	0.10%
W eq	34%	50%	3%	13%

Los resultados muestran que dos comparadores referenciales (G0B2 y L7US) tienen un retorno muy similar a la tasa libre de riesgo. En el caso del índice G0B2 el retorno en exceso es de 0.27% y el del índice L7US es de 0.10%, esto va acorde a un criterio de seguridad y liquidez antes que rentabilidad. Por el contrario, los índices G1O2 y en particular el índice G0FB muestran retornos en exceso de 1.22% y 4.16% respectivamente, lo que refleja un mayor riesgo en ellos y enfoque de inversión basado en la rentabilidad.

3.3. Expectativas

El punto de partida en el modelo Black – Litterman es el vector de retornos en exceso de equilibrio Π que son modificados de acuerdo a las expectativas que posea el

⁹ Se consideró como activo libre de riesgo el índice G001 de Merrill Lynch que representa las letras del Tesoro Americano a 3 meses.

¹⁰ En el caso particular bajo análisis, el retorno del portafolio de mercado promedio de 1999 - 2008 fue 4.3% y el rendimiento promedio del activo libre de riesgo para el mismo periodo fue de 3,5%. La varianza del portafolio de mercado fue de 0,01%. El coeficiente de aversión al riesgo es: $\lambda = (4,3\% - 3,5\%) / 0,01\% = 67$.

¹¹ En este sentido se trató de no asumir la linealidad en las correlaciones de los activos considerados a través de la estimación no-paramétrica de Kendall.

inversionista. En este sentido Idzorek (2004) contribuye con una metodología que permite incorporar a una perspectiva específica un nivel de confianza que oscila de 0% a 100%¹². Este hecho es de gran utilidad ya que otorga mayor flexibilidad al administrador de portafolios en el momento de definir sus expectativas. Adicionalmente, Fusai y Meucci (2003) proponen un índice de consistencia de las expectativas y un vector de sensibilidad del índice respecto a cada perspectiva que permite identificar si el *view* dado por el administrador de portafolio es muy “agresivo” y debe ser modificado¹³.

Se analizaron 4 escenarios: un ciclo de disminución de tasas, un ciclo de incremento en las tasas y un ciclo de pausa en las tasas. Adicionalmente se efectuó una proyección de excesos de retorno para el 2009 para cada uno de los comparadores referenciales de los portafolios del capital de inversión en base a las siguientes consideraciones:

- i) Tanto la Reserva Federal de Estados Unidos como el Banco Central Europeo mantendrían sus tasas referenciales en 0.25% y 1.00% respectivamente durante el 2009, como estímulo monetario ante un escenario de crisis económica global profunda.
- ii) Se espera que las expectativas de mercado hacia una recuperación económica de Estados Unidos el 2010 sean más fuertes y ello genere un empinamiento gradual en la curva de rendimientos lo que se traduciría en un rendimiento a vencimiento de la Nota del Tesoro a 2 años de 1.60%.
- iii) El diferencial entre la tasa LIBOR a 6 meses y la tasa referencial de la Reserva Federal de los Estados Unidos se aproximará a su promedio histórico de 0.30% - 0.40%.
- iv) De acuerdo a proyecciones de analistas de mercado se espera que el tipo de cambio USD/EUR se encuentre a fin de año en 1.50. Esto representaría una apreciación del dólar norteamericano de 7% tomando en cuenta que a inicios de año el tipo de cambio USD/EUR se encontraba en 1.40.

¹² El algoritmo propuesto por Idzorek (2004) es expuesto en el Apéndice B.

¹³ El índice de consistencia de Fusai-Meucci (2003) y el vector respectivo de sensibilidades es detallado en el Apéndice C.

Para generar cada uno de los escenarios de incremento de tasas, disminución de tasas y pausa en las tasas se consideraron los retornos en exceso históricos medios en base a una muestra de retornos anuales móviles diarios de cada uno de los comparadores referenciales de los portafolios que conforman el capital de inversión de 1990-2008. Este tamaño de muestra permite capturar 3 periodos de disminución de las tasas de interés, 2 periodos de incremento en las tasas de interés y 4 periodos de pausa. El Cuadro 3.3 resume los retornos en exceso para cada uno de los escenarios considerados.

Cuadro 3.3 Perspectivas de retornos en exceso

	Ciclo de Disminución	Ciclo de Incremento	Ciclo de Pausa	2009	Confianza
G0B2	0.3%	0.1%	0.1%	0.2%	90%
G1O2	2.7%	-0.8%	0.6%	0.1%	50%
G0FB	3.0%	3.9%	-7.5%	7.3%	30%
L7US	0.3%	0.1%	0.3%	1.3%	90%

Cabe mencionar que el vector de confianza en las expectativas es un elemento totalmente “subjetivo” que se define acorde al conocimiento que posea el administrador de portafolios sobre cada uno de los activos que participan en la optimización y en el caso particular se mantiene constante para cada una de los escenarios dando una mayor seguridad a las expectativas de los índices de los portafolios de liquidez y depósitos (menor incertidumbre en las expectativas), y una mayor incertidumbre a las perspectivas de los índices de los portafolios de inversiones y euros. Además, el cuadro 3.3 muestra como en ciclos de disminución de tasas el portafolio de inversiones con una duración más larga tiene un mayor exceso de retorno respecto a los portafolios de corto plazo (G0B2 y L7US). Esto se revierte en un ciclo de incremento de tasas y es moderado en un ciclo de pausa como el que se espera durante todo el 2009. EL cuadro 3.4 muestra las volatilidades implícitas que se generaron a través de la metodología de Idzorek (2004) y las volatilidades registradas en cada uno de los escenarios dados.

Cuadro 3.4 Volatilidades Implícitas y Observadas

	Ciclo de Disminución		Ciclo de Incremento		Ciclo de Pausa		2009
	Observada	Implícita	Observada	Implícita	Observada	Implícita	Implícita
G0B2	0.1%	0.7%	0.0%	0.1%	0.1%	0.0%	0.3%
G1O2	0.8%	4.2%	0.9%	0.0%	1.3%	1.8%	0.3%
G0FB	8.5%	8.6%	6.9%	11.1%	10.0%	0.0%	21.3%
L7US	0.3%	0.1%	0.1%	0.2%	0.2%	0.1%	0.1%

Es importante resaltar que cuando la expectativa considerada toma en cuenta que el activo tendrá un retorno por debajo del activo de riesgo (retorno en exceso negativo) la volatilidad implícita que arroja la metodología de Idzorek es nula. Por ejemplo, para el comparador referencial del portafolio de euros (G0FB) se tienen un retorno esperado en un ciclo de pausa de tasas de interés de -7.5%, ello genera una volatilidad implícita de la perspectiva nula considerando que es el comparador referencial con mayor riesgo ya que está expuesto totalmente al riesgo de tipo de cambio. Este resultado “contraintuitivo” se debe a la perspectiva negativa sobre el comparador que contradice el comportamiento racional de un inversionista quien no invertiría en un activo riesgoso cuyo retorno esté por debajo del activo libre de riesgo, y por lo tanto no sería tomado en cuenta en la optimización. No obstante, esto puede ser evaluado objetivamente a través del índice de consistencia y el vector de sensibilidades propuestos por Fusai y Meucci (2003). El cuadro 3.5 muestra los resultados para cada una de las perspectivas consideradas.

Cuadro 3.5 Índice de Consistencia y Vector de Sensibilidades

	Ciclo de Disminución	Ciclo de Incremento	Ciclo de Pausa	2009
G0B2	0.0%	0.0%	0.2%	0.0%
G1O2	0.0%	57.6%	0.0%	0.0%
G0FB	0.0%	0.0%	54.5%	0.0%
L7US	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
Consistencia	100%	1%	10%	100%

Los resultados muestran que las perspectivas (en base a promedios históricos) del ciclo de incremento de tasas y del ciclo de pausa son inconsistentes y ello se debe a las perspectivas sobre el comparador G1O2 y sobre el comparador G0FB en sus ciclos respectivos. Como las sensibilidades son positivas, ello indica que debe incrementarse el retorno en exceso para cada escenario en tales índices. Si las sensibilidades hubieran resultado negativas, entonces ello sugeriría disminuir los retornos en exceso para los respectivos índices. En el caso particular, no se modifican las perspectivas ya que son datos que se han registrado en la muestra tomada, pero se toma en cuenta que el retorno en exceso combinado puede resultar muy distinto al de equilibrio para los escenarios de incremento y pausa en las tasas.

A partir de las perspectivas y volatilidades implícitas del cuadro 3.3 y 3.4 respectivamente se construyen las siguientes matrices, que para el caso de la proyección 2009 son:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0.2\% \\ 0.1\% \\ 7.3\% \\ 1.3\% \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} (0.3\%)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (0.3\%)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (21.3\%)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (0.1\%)^2 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

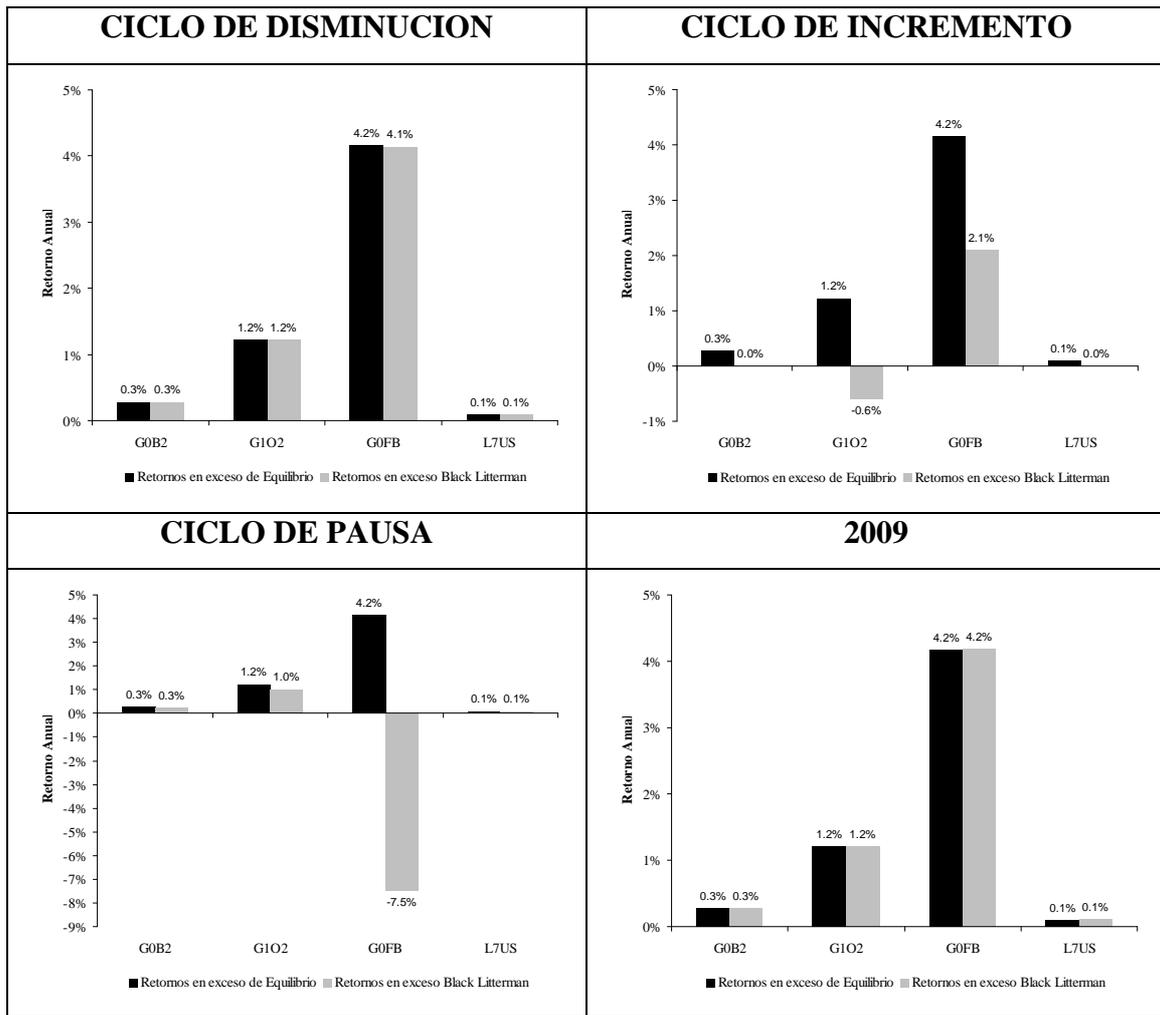
Combinando las matrices en (3.1), los retornos de equilibrio obtenidos anteriormente y considerando un $\tau = 0.10$ acorde a (2.9)¹⁴, el gráfico 3.1 muestra los retornos en exceso combinados generados por (2.12) comparándolos con los retornos en exceso de equilibrio. En este punto radica la flexibilidad del enfoque Black-Litterman frente al de Markowitz, ya que si no se poseen expectativas respecto a los activos que forman parte del proceso de optimización, entonces se toman los retornos en exceso de equilibrio de acuerdo a (2.12). De lo contrario, los retornos esperados son una combinación de los retornos en exceso de equilibrio y las expectativas¹⁵ del inversionista.

Es interesante ver que si se incorporan perspectivas negativas en el modelo (ciclo de incremento y ciclo de pausa) aquellos activos con tal perspectiva (y por ello volatilidad implícita nula) poseen retornos en exceso combinados que son muy similares (sino iguales) a los de sus respectivas perspectivas. Por ejemplo, en el caso del portafolio de euros, su perspectiva para un escenario de pausa es un retorno en exceso de -7.5% y el retorno en exceso combinado es también -7.5% tomando en cuenta que se empleó un $\tau = 0.1$; es decir, nuestra confianza en los retornos de equilibrio es alta y por ello el vector resultante no debería alejarse demasiado del de equilibrio. Este resultado ya fue anticipado por las pruebas de consistencia y sensibilidad efectuadas a cada una de las perspectivas.

¹⁴ Ya que para el cálculo de los retornos de equilibrio se consideraron retornos anuales de 1999 – 2008, $T = 10$ y por ello $\tau = 0.10$.

¹⁵ Se introdujeron expectativas absolutas en la aplicación del modelo Black-Litterman a la asignación de activos de las Reservas Internacionales del BCB. También pueden introducirse expectativas relativas, para más detalle puede consultarse Litterman (2003).

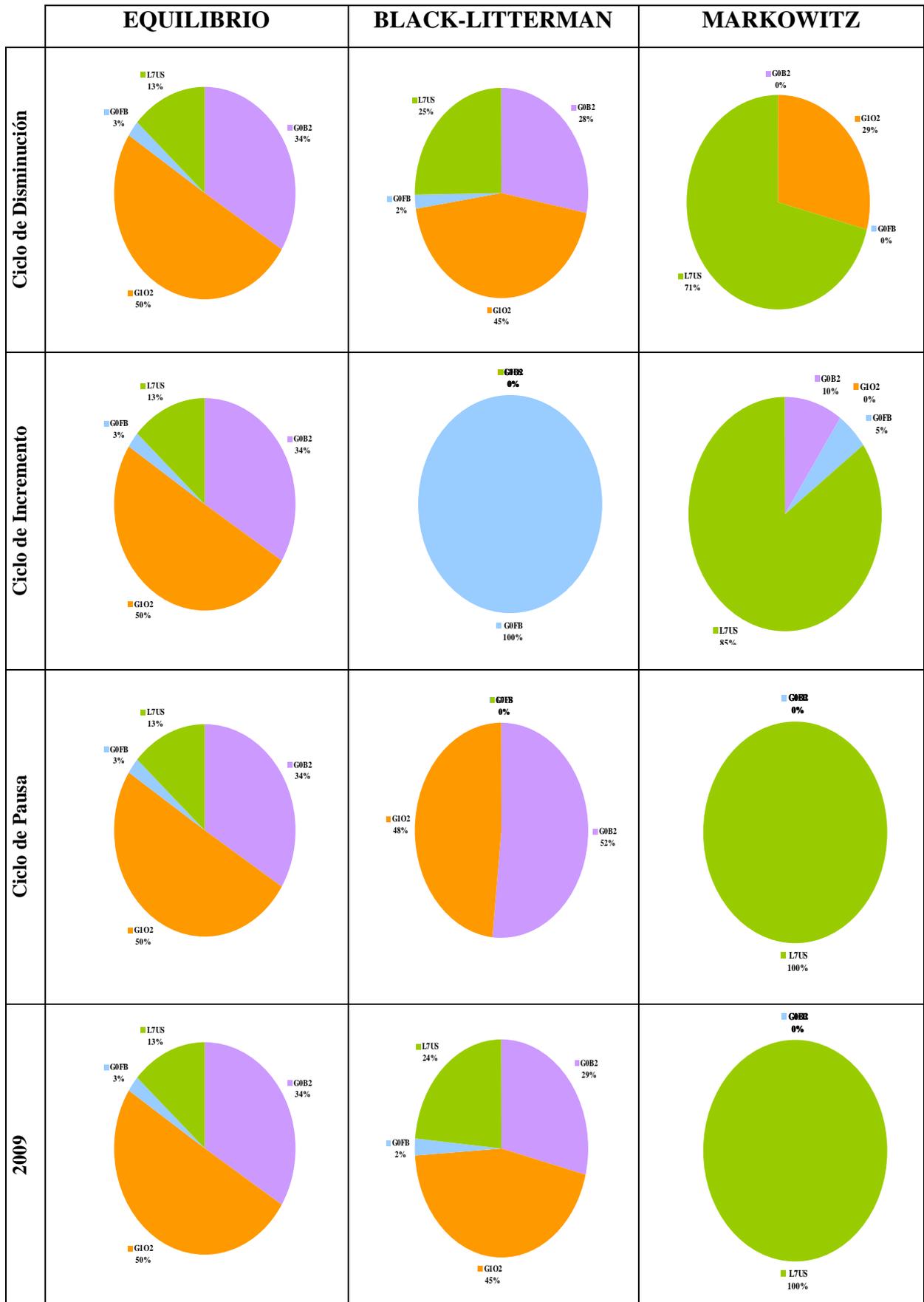
Gráfico 3.1 Resultados Modelo Black Litterman



3.4. Optimización

Tomando los retornos generados por el modelo de Black – Litterman y la matriz de covarianzas acorde a (2.13), se calculan los pesos óptimos (sin restricciones) y se los contrasta con los pesos de equilibrio del Cuadro 3.1 y los pesos óptimos (sin restricciones) empleando la metodología de Markowitz. Los resultados se muestran en el Gráfico 3.2

Gráfico 3.2 Asignación óptima de Activos (sin restricciones)



Como se anticipaba, los resultados de los pesos óptimos bajo el enfoque Black Litterman son extremos para el escenario de incremento de tasas y el escenario de pausa en las tasas debido a la inconsistencia de las perspectivas introducidas. Por ello, es muy importante evaluar la consistencia de las perspectivas que se dan sobre los activos para evitar resultados “de esquina” como los obtenidos en los escenarios de incremento y pausa de las tasas. En cambio, cuando las expectativas son consistentes, los resultados son diversificados (como lo son los pesos de equilibrio) y adicionalmente son intuitivos. Por ejemplo, en el caso del escenario de disminución de las tasas de interés la expectativa es que los comparadores G0FB y G1O2 generen un exceso de retorno por debajo del de equilibrio (ver cuadros 3.2 y 3.3) por lo que sus respectivas asignaciones están por debajo de sus pesos de equilibrio. En contraparte, el comparador referencial del portafolio de depósitos presenta una perspectiva de retorno en exceso muy superior a su nivel de equilibrio (24 pb. por encima) y ello contribuye a que su asignación también sea incrementada en similar proporción.

Con respecto a las asignaciones óptimas bajo el enfoque de Markowitz, ellas comparten una característica similar: baja o nula diversificación. Ello se debe a que el optimizador beneficiará aquellos activos que posean un retorno ajustado por su volatilidad superior a los demás y contribuyan a disminuir el riesgo del portafolio en su conjunto (baja correlación), en otras palabras, es una optimización “ciega” ya que no considera que existe un error de estimación en cada uno de estos parámetros. Por ello se comenta que la metodología de Markowitz optimiza errores. Sin embargo, la metodología Black-Litterman ayuda a salvar estas inconsistencias del modelo media-varianza puro de Markowitz volviéndolo un enfoque más robusto al incorporar los pesos de mercado de los activos como punto de partida permitiendo obtener portafolios diversificados cuyos pesos son modificados acorde a las expectativas que se tengan sobre cada uno de los activos. Cabe resaltar que los portafolios obtenidos bajo el enfoque Black-Litterman serán diversificados si y solamente si la confianza en los retornos en exceso de equilibrio implícitos es alta; es decir, en la medida que el parámetro τ se acerque a 0 la diversificación será mayor ya que se basará principalmente en el portafolio de mercado (equilibrio). He aquí un punto importante en el modelo: el parámetro τ . Lamentablemente o tal vez afortunadamente no existe un consenso en la estimación de este parámetro porque dependerá mucho de cuan cerca se desee estar del portafolio de

mercado. El cuadro 3.6 muestra los portafolios óptimos de la proyección para el 2009 bajo distintos niveles de τ .

Cuadro 3.6 Portafolios óptimos (2009) para diferentes niveles de τ

Tau	0	0.01	0.05	0.1	0.25	0.5	0.75	1	1000	Inf
G0B2	34%	28%	29%	29%	30%	32%	33%	35%	5%	0%
G1O2	50%	45%	45%	45%	45%	46%	46%	47%	2%	0%
G0FB	3%	2%	2%	2%	2%	3%	3%	3%	2%	0%
L7US	13%	25%	24%	24%	22%	20%	17%	15%	90%	100%

Los resultados son los esperados. Si se desea tener un portafolio alejado del portafolio de mercado (en el extremo la metodología de Markowitz) entonces debe seleccionarse un τ alto, caso contrario se adopta τ cercano a 0 que permita obtener un portafolio tan diversificado como el de mercado.

4. Conclusiones y Recomendaciones

La flexibilidad en el enfoque Black-Litterman se evidencia en dos elementos: la inclusión o no de expectativas sobre los activos que formarán parte de la optimización y la metodología de Idzorek (2004) que permite dar un nivel de confianza a las expectativas. En el caso del ejercicio desarrollado, los retornos en exceso de equilibrio de cada uno de los portafolios que componen el capital de inversión y las respectivas expectativas sobre sus retornos bajo los escenarios de disminución de tasas, incremento de tasas, pausa de las tasas y 2009 generan los retornos en exceso esperados que serán incluidos en la optimización. En el caso del modelo de Markowitz, necesariamente se debe contar con las expectativas sobre los retornos esperados de cada uno de los portafolios lo que quita flexibilidad al análisis.

Los resultados muestran que la asignación bajo el modelo Black-Litterman es más diversificada bajo dos de los escenarios considerados (disminución de tasas y 2009), los restantes escenarios generan soluciones concentradas o de esquina que son causa de la inclusión de expectativas inconsistentes bajo el criterio Fusai-Meucci (2003). Por ello, es importante evaluar la consistencia de las expectativas que serán combinadas con los retornos en exceso de equilibrio para evitar distorsiones en los resultados. Los resultados obtenidos bajo la metodología de Markowitz son altamente concentrados siendo una gran debilidad que ha sido ampliamente cuestionada en la aplicación empírica.

Cabe resaltar que más que los resultados obtenidos *per se* el estudio apunta a mostrar los beneficios en términos de diversificación y flexibilidad que permite el modelo Black-Litterman. En el contexto de la definición de los lineamientos del capital de inversión es importante tener una metodología que ofrezca resultados diversificados y permita orientarlos acorde a las expectativas que se tengan sobre los mercados financieros globales ya que este es un proceso *forward looking* y no *backward looking*; es decir, lo que ha acontecido en el pasado no es de utilidad para definir la asignación estratégica del capital de inversión sino lo que sucederá en el futuro y cuanta seguridad se tenga sobre ello.

Finalmente, como todo modelo, el enfoque Black-Litterman tiene sus limitantes como el partir del supuesto de normalidad (supuesto que generalmente no se verifica por la existencia de eventos extremos como la crisis financiera internacional reciente). Ello es un ejemplo que demuestra que no existe el modelo absoluto y actualmente se está investigando las extensiones del modelo Black-Litterman eliminando el supuesto de normalidad y otros modelos que toman medidas de riesgo alternativas como el modelo media-CVaR.

APENDICE A

DERIVACION MODELO BLACK LITTERMAN¹⁶

Tomando (2.9) y (2.11) se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\Pi &= \mu + \varepsilon_{\Pi}, \quad \varepsilon_{\Pi} \sim N(0, \tau \Sigma) \\ \mathbf{q} &= \mathbf{P}\mu + \varepsilon_{\mathbf{q}}, \quad \varepsilon_{\mathbf{q}} \sim N(0, \Omega)\end{aligned}\tag{A.1}$$

(A.1) puede reformularse de la forma:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mu + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \mathbf{V})$$

donde:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \Pi \\ \mathbf{q} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \tau \Sigma & \\ & \Omega \end{bmatrix}$$

Aplicando la técnica de mínimos cuadrados generalizados y efectuando la sustitución respectiva, se tiene:

$$\begin{aligned}\mu_{BL} &= (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y} \\ \mu_{BL} &= \left(\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{P}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\tau \Sigma)^{-1} & \\ & \Omega^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{P}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\tau \Sigma)^{-1} & \\ & \Omega^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \\ \mu_{BL} &= \left(\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{P}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\tau \Sigma)^{-1} \\ \Omega^{-1} \mathbf{P} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{P}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\tau \Sigma)^{-1} \Pi \\ \Omega^{-1} \mathbf{q} \end{bmatrix} \\ \mu_{BL} &= \left[(\tau \Sigma)^{-1} + \mathbf{P}' \Omega^{-1} \mathbf{P} \right]^{-1} \left[((\tau \Sigma)^{-1} \Pi + \mathbf{P}' \Omega^{-1} \mathbf{q}) \right]\end{aligned}$$

¹⁶ Fabozzi, Frank *et al.*, *Robust Portfolio Optimization and Management* (New York: Wiley and Sons, 2007)

APENDICE B

METODOLOGIA DE IDZOREK (2004)¹⁷

Idzorek propone que los elementos de la diagonal de la matriz de incertidumbre de las perspectivas Ω se deriven a base de niveles de confianza especificados por el usuario. El algoritmo propuesto sigue los siguientes pasos:

1. – Para cada i -ésima perspectiva, calcular el vector de retornos en exceso combinados asumiendo una confianza de 100% en la perspectiva (ello implica que la diagonal de la matriz Ω es 0).

$$\mu_{i,100\%} = \Pi + \varpi \Sigma p_i' (p_i \varpi \Sigma p_i')^{-1} (Q_i - p_i \Pi) \quad (\text{B.1})$$

donde,

$\mu_{i,100\%}$ es el vector de retornos en exceso combinados basado en un 100% de confianza en la pésima expectativa.

p_i identifica al activo envuelto en la i -ésima perspectiva (es un vector $1 \times N$).

Q_i es la i -ésima perspectiva de retorno en exceso de la tasa libre de riesgo (es un escalar).

2. – Calcular $w_{i,100\%}$, el vector basado en un 100% de confianza en la i -ésima perspectiva empleando la fórmula de maximización sin restricciones.

$$w_{i,100\%} = (\lambda \Sigma)^{-1} \mu_{i,100\%} \quad (\text{B.2})$$

3. Calcular la desviación máxima de los pesos del portafolio de mercado (equilibrio) causada por el 100% de confianza en la i -ésima perspectiva.

$$D_{i,100\%} = w_{i,100\%} - w_{mkt} \quad (\text{B.3})$$

¹⁷ Idzorek, Thomas. *A Step-by-step guide to the Black-Litterman model: Incorporating user-specified confidence levels* (Zephyr Associates, 2004)

donde,

$D_{i,100\%}$ es la desviación máxima del portafolio de mercado (equilibrio) basada en una confianza del 100% en la i -ésima perspectiva (en un vector columna $N \times 1$).

4. – Multiplicar los N elementos de $D_{i,100\%}$ por la confianza definida por el usuario C_i para estimar el $Tilt_i$ (i -ésimo desvío) ocasionado por la i -ésima perspectiva.

$$Tilt_i = D_{i,100\%} * C_i \quad (B.4)$$

donde,

$Tilt_i$ es el desvío deseado (peso activo) originado por la i -ésima perspectiva (vector $N \times 1$).

C_i es un vector $N \times 1$ donde los activos que son parte de la perspectiva reciben un nivel de confianza específico de la i -ésima perspectiva y los activos que no forman parte de la perspectiva tienen un valor de 0.

5. – Estimar el vector de pesos objetivo $w_{i,\%}$ basado en el desvío.

$$w_{i,\%} = w_{mkt} + Tilt_i \quad (B.5)$$

6. – Encontrar el valor de ω_i (el i -ésimo elemento de la diagonal de Ω), que representa la incertidumbre en la i -ésima perspectiva, que minimiza la suma de diferencias al cuadrado entre $w_{i,\%}$ y w_i . En este punto se efectuó una modificación a la función objetivo propuesta originalmente por Idzorek ya que los resultados arrojados resultaban a veces contraintuitivos.

$$\min \sum \left(\frac{w_i}{w_{i,\%}} - 1 \right)^2 \quad (B.6)$$

sujeto a $\omega_i > 0$

donde,

$$w_i = [\lambda \Sigma]^{-1} \left[(\hat{\Sigma})^{-1} + p_i' \omega_i^{-1} p_i \right]^{-1} \left[(\hat{\Sigma})^{-1} \Pi + p_i' \omega_i^{-1} Q_i \right] \quad (\text{B.7})$$

7. – Repetir los pasos 1 al 6 para cada una de las perspectivas construyendo de esta forma la matriz diagonal Ω .

APENDICE C

PRUEBA DE CONSISTENCIA DE LAS PERSPECTIVAS¹⁸

El vector de retornos en exceso combinados es resultado de las perspectivas introducidas al modelo Black-Litterman lo cual provee un marco flexible al usuario (especialmente combinándolo con la metodología de Idzorek (2004)). Sin embargo, el vector de excesos de retorno combinados μ_{BL} resultante puede ser muy diferente del vector de equilibrio Π originando soluciones contraintuitivas. Para evitar ello, Fusai y Meucci (2003) propusieron una prueba de consistencia que se basa en la distancia de Mahalanobis (Morrison, 1990), que se puede ver como un *z-score* multivariante, para determinar cuan “alejado” se encuentra el vector μ_{BL} del vector Π .

$$M(q) = (\mu_{BL}(q) - \Pi)' (\tau \Sigma)^{-1} (\mu_{BL}(q) - \Pi) \quad (C.1)$$

Si $M(q)$ está por debajo de un umbral especificado por el usuario del modelo Black-Litterman, entonces las perspectivas pueden ser introducidas en el modelo de manera segura; de lo contrario, alguna de las perspectivas debe ser modificada. Este indicador también puede ser transformado en una probabilidad de que el vector de perspectivas q sea consistente observando que la distancia de Mahalanobis en (C.1) sigue una distribución chi-cuadrado con N grados de libertad (N denota el número de activos). Por lo tanto, la probabilidad o índice de consistencia se mide por:

$$P(q) = 1 - F(M(q)) \quad (C.2)$$

donde F denota la función de probabilidad acumulada con N grados de libertad.

Nuevamente, si la probabilidad está por debajo de un umbral deseado entonces es necesario modificar alguna de las perspectivas. La determinación de que perspectivas deben ser modificadas para que q sea más consistente se mide a través de la sensibilidad de $P(q)$ a cada una de las perspectivas. Esto es:

¹⁸ Fusai, G. y A. Meucci. *Assesing Views* (Risk Magazine, Marzo 2003).

$$\frac{\partial P(q)}{\partial q} = \frac{\partial P}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial \mu_{BL}} \frac{\partial \mu_{BL}}{\partial q} \quad (C.3)$$

$$\frac{\partial P(q)}{\partial q} = -2f(M)(P\Sigma P' + \Omega)^{-1} P(\mu_{BL} - \Pi)$$

donde $f = \frac{dF}{dM}$ es la función de densidad de la distribución chi-cuadrado con N grados de libertad. La expresión (C.3) permite identificar que perspectivas deben ser modificadas acorde a su magnitud en valor absoluto. Es decir, mientras mayor sea la sensibilidad en valor absoluto, mayor será la mejora de la probabilidad de consistencia. Si el valor de la sensibilidad de la i-ésima perspectiva es negativo, entonces ésta debe ser disminuida. Si el valor de la i-ésima perspectiva es positivo, entonces ésta debe ser incrementada.

REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

BEVAN, A., K. WINKELMANN (1998). "Using the Black - Litterman Global Asset Allocation Model: Three Years of Practical Experience." *Fixed Income Research, Goldman Sachs*.

BLACK, F. y R. LITTERMAN (1992). "Global Portfolio Optimization." *Financial Analysts Journal* 48 (Septiembre/Octubre): 28-43.

FABOZZI, F., P. KOLM, D. PACHAMANOVA y S. FOCARDI (2007). *Robust Portfolio Optimization and Management*. John Wiley & Sons, New Jersey.

FABOZZI, F., S. RACHEV, J. HSU y B. BAGASHEVA (2008). *Bayesian Methods in Finance*, John Wiley & Sons, New Jersey.

FUSAI, G y A. MEUCCI (2003). "Assessing Views" *Risk Magazine* Marzo 2003.

IDZOREK, T (2004), "A step-by-step guide to the Black-Litterman Model: Incorporating user-specified confidence levels" *Zephyr Associates, Inc*.

LITTERMAN, R. (2003). *Modern Investment Management*, John Wiley & Sons, New Jersey.

MARKOWITZ, H. (1952). "Portfolio Selection." *The Journal of Finance* 7(1):77-91.

SCHERER, B. y D. MARTIN (2005) *Introduction to Modern Portfolio Optimization*, Springer, New York.