Desarrollo de un nuevo algoritmo para resolver programas lineales enteros y su aplicación práctica en el desarrollo económico.

7071

Febrero, 2014

Resumen

Es importante señalar que en un entorno social en pleno desarrollo económico la optimización de recursos busca maximizar y minimizar una cantidad denominada objetivo.

En este documento se presenta la generación de conocimiento científico en el desarrollo de un nuevo algoritmo para resolver programas lineales enteros como herramienta matemática alternativa para la toma de decisiones con el propósito de lograr un desarrollo y crecimiento económico altamente competitivo dentro de las organizaciones, empresas, instituciones.

Para lo cual es necesario lograr un dominio cognitivo en la construcción y optimización de los programas lineales enteros enfocados a mantener una aplicación práctica en las inversiones, presupuestos de capital, asignación de recursos que es un proceso matemático que sirve para tomar decisiones bajo incertidumbre, riesgo y certidumbre.

Clasificación JEL: *C02, C61*

Palabras clave*: programa lineal entero, toma de decisiones, optimización*

I. Introducción

Históricamente el proceso de construcción de modelos cuantitativos forma parte importante en la toma de decisiones para dar soluciones a una gran variedad de situaciones dificultosas o por emprender.

Así mismo la construcción de modelos económicos conduce a tomar mejores decisiones que aportan conocimientos que influyen en el proceso de aprendizaje más aun cuando brinda la generación de conocimiento científico de calidad aportando al desarrollo económico de un país. Estos modelos representan una abstracción cuidadosamente seleccionada de la realidad y son un instrumento de planificación estratégica para las empresas, instituciones, nos sirven para explorar una amplia variedad de alternativas, produciendo y generando resultados a alcanzar en un determinado periodo.

"La ciencia económica en su enfoque sistémico busca esencialmente la asignación y distribución eficiente de recursos escasos o limitados entre una amplia variedad de alternativas o actividades estableciendo un objetivo en común a ser optimizado.[1]"

[1] La optimización busca encontrar el mejor resultado maximizar o minimizar una cantidad llamada objetivo a través de un conjunto de restricciones.

II. Desarrollo de la investigación

El conocimiento es la capacidad humana de un proceso intelectual de enseñanza y aprendizaje permitiendo el trabajo intelectual entre una sociedad altamente dinámica entre agentes económicos. Por tal razón la clase social económicamente domina el trabajo intelectual, despeñando funciones de planificación, organización y control de la sociedad en los ámbitos de la producción de bienes y servicios del aparato estatal y del sector privado motivado por las ganancias que puede generar, y las necesidades económicas y sociales que se pueden satisfacer.

El desarrollo de este algoritmo se basa en el tipo de investigación experimental implicando una alteración controlada de las variables el cual se repitió en múltiples ocasiones con diversos casos de aplicación el cual tuvo como producto un fenómeno deseado condicionándose como un nuevo algoritmo a consecuencia de una derivación del algoritmo de ramificación y acotamiento.

A continuación para determinar las correspondientes asignaciones se trabajo con respectivas restricciones con el modelo matemático que se define como:[2]

$$OPTIMIZACION\ (z) = \ x_1 + \ x_2 + \ x_3 + \ . \ . \ . \ . \ x_n$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 + & x_2 + & x_3 + & . & . & . & . & x_n & \geq b1 \\
x_1 + & x_2 + & x_3 + & . & . & . & . & x_n & = b2 \\
x_1 + & x_2 + & x_3 + & . & . & . & . & x_n & \leq b3 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
x_1 & x_2 & x_3 & . & . & . & . & x_n & = bm
\end{array}$$

III. Determinación de la función objetivo

La determinación se lo realiza aplicando la minimización y maximización donde:

$$MAX\ (z) = \quad Ingresos, utilidades, cantidad\ producida, tiempo\ productivas, Horas\ trabajo$$
$$MIN\ (z) = \quad Gastos, costos\ desperdicio, tiempo\ ociosos,$$

[2] Restricción "≤" (menor o igual) utilizada cuando los elementos del primer miembro son parámetros y representan recursos limitados, los elementos del segundo miembro son el empleo disponible designado a esa actividad, la desigualdad se convierte en igualdad cuando se adhiere a la restricción una Variable de Holgura con signo positivo. Restricción "≥" (mayor o igual) utilizada cuando los elementos del primer miembro son requerimientos mínimos a emplearse, los elementos del segundo miembro son el empleo disponible designado a esa actividad, la desigualdad se convierte en igualdad cuando se adhiere a la restricción una Variable de Superflua con signo negativo mas .

IV. Programación lineal

"La programación lineal es el modelo matemático que tiene la finalidad de asignar recursos entre actividades de manera óptima[3]."

"La programación lineal se constituye una herramienta importante en las ciencias económicas y administrativas, aplica teorías de algebra lineal y matricial, método simplex con la finalidad de de hacer uso de una aplicación práctica en la toma de decisiones en los problemas que deben ser optimizados.[4]"

"Los problemas de asignación en la programación lineal por las características que poseen se resuelven aplicando directamente el Método Simplex con la finalidad de encontrar la solución entera.[5]"

Así mismo se debe establecer las restricciones que considera la suma de las variables de multiplicadas por los coeficientes o parámetros establecidos siendo la función menor, igual o mayor que los recursos limitados, que establecen la función a minimizar o maximizar una función objetivo sujeto a una serie de restricciones.

V. Desarrollo y análisis por el Algoritmo de Ramificación y Acotamiento (Método de Branch and Bound)

El proceso de solución de ramificación y acotamiento del programa lineal consiste en integrar restricciones al programa, las cuales se determina de la solución básica final en donde las variables de decisiones lanza resultados donde el valor no es un numero entero, el cual implica determinar restricciones dobles, mismas que forman nodos formando un árbol de soluciones.

"Las soluciones sucesiva de los algoritmos deben mejorar la anterior en búsqueda de la mejor solución optima.[6]"

A continuación se desarrolla de manera explícita y matemática el procedimiento de solución.

---

[3] El programa lineal se representa como un modelo deterministico formado por una o más ecuaciones lineales o de primer grado en relación a una función objetivo por optimizar.

[4] El método simplex es el método algebraico para resolver los programas lineales transformando las inecuaciones en ecuaciones introduciendo variables según la restricción.

[5] La solución entera es cuando todos los valores de la solución básica final son números enteros donde $x_1, x_2, \ldots \ldots \ldots x_n \geq 0$, enteras

[6] El algoritmo es el conjunto de operaciones lógicas y matemáticas expresadas en un procedimiento de cálculo con reglas establecidas y con u numero finito de pasos de programación de alto nivel.

VI. Resolución del programa lineal entero por el Algoritmo de Ramificación y Acotamiento

Programa lineal origen

Función objetivo

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

Restricciones

$$\begin{cases} 2x_1 + \quad x_2 & \leq 6 \\ 2x_1 + \quad 3x_2 & \leq 9 \end{cases}$$

$$x_1\ , x_2 \geq\ 0, \text{enteras}$$

Solución

Estandarizando el programa

$$MAX\ (z) = \quad 3x_1 + \quad 4x_2 + \quad 0x_3 + \quad 0x_4$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 \quad\quad & = 6 \\ 2x_1 + \quad 3x_2 \quad\quad + \quad x_4 & = 9 \end{aligned}$$

Resolviendo el programa originen por el metodo de Tabla sinplex

		x_1	x_2	x_3	x_4		$RATIO$
C_J		3	4	0	0		
x_3	0	2	1	1	0	6	6
x_4	0	2	3	0	1	9	3
Z_J		0	0	0	0	0	
$Z_J - C_J$		(3)	(4)	0	0		
x_3	0	4/3	0	1	(1 /3)	3	2,25
x_2	4	2/3	1	0	1/3	3	4,5
Z_J		8/3	4	0	4/3	12	
$Z_J - C_J$		(1 /3)	0	0	4/3		
x_1	3	1	0	3/4	(1 /4)	9/4	
x_2	4	0	1	(1 /2)	1/2	3/2	
Z_J		3	4	1/4	5/4	51/4	
$Z_J - C_J$		0	0	1/4	5/4		

Interpretacion

Funcion objetivo

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$MAX\ (z) = 12{,}75$$

Variables de Decision			Variables de Holgura
x_1 = 9/4	→	x_1 = 2,25	x_3 = 0
x_2 = 3/2	→	x_2 = 1,5	x_4 = 0

x_1 = 2,25 Entero mas proximo es 2, y se encuentra 25 decimas de este entero

x_2 = 2,25 Entero mas proximo es 2, y se encuentra 5 decimas de este entero

Seleccionamos la variable de Decisión x_2 debido al valor de las decimas, que se alejan mas de ser una unidad entera que de la variable x_1

Por tanto

$$t_1 \le x_2 \le t_2$$

Donde t_1, t_2 son numeros enteros y se comienza a establecer las nuevas restricciones, posteriormente se va añadiendo cada una de ellas al programa lineal

$$2 \le x_2 \le 1$$

Las nuevas restricciones son

$x_2 \le 1$ y $x_2 \ge 2$

Los nuevos programas lineales acotando las nuevas restricciones son los siguientes

Programa lineal 1

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{Bmatrix} 2x_1 + & x_2 & \le 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & \le 9 \\ & x_2 & \le 1 \end{Bmatrix}$$

$$x_1, x_2 \ge 0, \text{enteras}$$

Programa lineal 2

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{Bmatrix} 2x_1 + & x_2 & \le 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & \le 9 \\ & x_2 & \ge 2 \end{Bmatrix}$$

$$x_1, x_2 \ge 0, \text{enteras}$$

Resolviendo el programa lineal 1

$$MAX\ (z) = \ 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{Bmatrix} 2x_1 + & x_2 & \leq 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & \leq 9 \\ & x_2 & \leq 1 \end{Bmatrix}$$

$$x_1\ , x_2 \geq \ 0, \text{enteras}$$

Solución

Estandarizando el programa lineal 1

$$MAX\ (z) = \ 3x_1 + \ 4x_2 + \ 0x_3 + \ 0x_4 + \ 0x_5$$

$$\begin{matrix} 2x_1 + & x_2 + & x_3 & & & = 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & + & x_4 & & = 9 \\ & x_2 & & + & x_5 & = 1 \end{matrix}$$

Solucion Basica Final del programa lineal 1 por el metodo de tabla simplex

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
C_J		3	4	0	0	0	
x_1	3	1	0	1/2	0	(1 /2)	5/2
x_4	0	0	0	(1)	1	(2)	1
x_2	4	0	1	0	0	1	1
Z_J		3	4	3/2	0	5 /2	23/2
$Z_J - C_J$		0	0	3 /2	0	5 /2	

Interpretacion

Funcion objetivo

$$MAX\ (z) = \ 3x_1 + 4x_2$$

$$MAX\ (z) = \ 11{,}5$$

Variables de Decision		Variables de Holgura
x_1 = 5/2 →	x_1 = 2,5	x_3 = 0
x_2 = 1		x_4 = 1
		x_5 = 0

x_1 = 2,5 Entero mas proximo es 2, y se encuentra 5 decimas de este entero

Acontinuacion se elige la variable de Decisión x_1

Por tanto

$$t_1 \leq x_1 \leq t_2$$

$$3 \leq x_1 \leq 2$$

Las nuevas restricciones son

$x_1 \leq 2$ y $x_1 \geq 3$

Los nuevos programas lineales acotando las nuevas restricciones son los siguientes

Programa lineal 1.1

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{Bmatrix} 2x_1 + & x_2 & \leq 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & \leq 9 \\ & x_2 & \leq 1 \\ x_1 & & \leq 2 \end{Bmatrix}$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{enteras}$$

Programa lineal 1.2

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{Bmatrix} 2x_1 + & x_2 & \leq 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & \leq 9 \\ & x_2 & \leq 1 \\ x_1 & & \geq 3 \end{Bmatrix}$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{enteras}$$

Resolviendo el programa lineal 1.1

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{Bmatrix} 2x_1 + & x_2 & \leq 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & \leq 9 \\ & x_2 & \leq 1 \\ x_1 & & \leq 2 \end{Bmatrix}$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{enteras}$$

Estandarizando el programa lineal 1.1

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$\begin{array}{llllll} 2x_1 + & x_2 + & x_3 & & & = 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & + x_4 & & & = 9 \\ & x_2 & & + x_5 & & = 1 \\ x_1 & & & & + x_6 & = 2 \end{array}$$

Solucion Basica Final del programa lineal 1.1 por el metodo de tabla simplex

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
C_J		3	4	0	0	0	0	
x_3	0	0	0	1	0	(1)	(2)	1
x_4	0	0	0	0	1	(3)	(2)	2
x_2	4	0	1	0	0	1	0	1
x_1	3	1	0	0	0	0	1	2
Z_J		3	4	0	0	4	3	10
$Z_J - C_J$		0	0	0	0	4	3	

Interpretacion

Funcion objetivo

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$MAX\ (z) = 10$$

Variables de Decision	Variables de Holgura
x_1 = 2 x_2 = 1	x_3 = 1 x_4 = 2 x_5 = 0 x_6 = 0

La solucion basica final del programa lineal 1.1 lanza resultados de numeros enteros por tanto se contempla una solucion factible mas para la toma de decisiones respecto al caso.

Resolviendo el programa lineal 1.2

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$\left\{\begin{array}{llr} 2x_1 + & x_2 & \leq 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & \leq 9 \\ & x_2 & \leq 1 \\ x_1 & & \geq 3 \end{array}\right\}$$

$$x_1\ , x_2 \geq\ 0, \text{enteras}$$

Estandarizando el programa lineal 1.2

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - Mx_7$$

$$\begin{array}{lllllllll}
2x_1 + & x_2 + & x_3 & & & & & = 6 \\
2x_1 + & 3x_2 & + & x_4 & & & & = 9 \\
 & x_2 & & + & x_5 & & & = 1 \\
x_1 & & & & - & x_6 & +x_7 & = 3
\end{array}$$

Solucion Basica Final del programa lineal 1.2 por el metodo de tabla simplex

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
C_J		3	4	0	0	0	0	$-M$	
x_2	4	0	1	1	0	0	2	(2)	0
x_4	0	0	0	(3)	1	0	(4)	4	3
x_5	0	0	0	(1)	0	1	(2)	2	1
x_1	3	1	0	0	0	0	(1)	1	3
Z_J		3	4	4	0	0	5	(5)	9
$Z_J - C_J$		0	0	4	0	0	5	$(5) + M$	

Interpretacion

Funcion objetivo

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$MAX\ (z) = 9$$

Variables de Decision	Variables de Holgura	Variables superflua	Variable artificial
x_1 = 3	x_3 = 0	x_6 = 0	x_7 = 0
x_2 = 0	x_4 = 3		
	x_5 = 1		

La solucion basica final del programa lineal 1.2 lanza resultados de numeros enteros por tanto se contempla una solucion factible mas para la toma de decisiones respecto al caso.

Resolviendo el programa lineal 2

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + & x_2 & \leq 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & \leq 9 \\ & x_2 & \geq 2 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{enteras}$$

Estandarizando el programa lineal 2

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6$$

$$\begin{array}{llllll} 2x_1 + & x_2 + & x_3 & & & = 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & + & x_4 & & = 9 \\ & x_2 & & - & x_5 \quad +x_6 & = 2 \end{array}$$

Solucion Basica Final del programa lineal 2 por el metodo de tabla simplex

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
C_J		3	4	0	0	0	$-M$	
x_3	0	0	0	1	(1)	(2)	2	1
x_1	3	1	0	0	1/2	3/2	(3/2)	3/2
x_2	4	0	1	0	0	(1)	1	2
Z_J		3	4	0	3/2	1/2	(1/2)	25/2
$Z_J - C_J$		0	0	0	3/2	1/2	$\left(\frac{1}{2}\right) + M$	

Interpretacion

Funcion objetivo

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$MAX\ (z) = 12{,}5$$

Variables de Decision	Variables de Holgura	Variables superflua	Variable artificial
x_1 = 3/2	x_3 = 1	x_5 = 0	x_6 = 0
x_2 = 2	x_4 = 0		

x_1 = 1,5 , el Entero mas proximo es 2, y se encuentra 5 decimas de este entero

Acontinuacion se elige la variable de Decisión x_1

Por tanto

$$t_1 \leq x_1 \leq t_2$$

$$2 \leq x_1 \leq 1$$

Las nuevas restricciones son

$x_1 \leq 1$ y $x_1 \geq 2$

Los nuevos programas lineales acotando las nuevas restricciones son los siguientes

Programa lineal 2.1

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{Bmatrix} 2x_1 + & x_2 & \leq 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & \leq 9 \\ & x_2 & \geq 2 \\ x_1 & & \leq 1 \end{Bmatrix}$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{enteras}$$

Programa lineal 2.2

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{Bmatrix} 2x_1 + & x_2 & \leq 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & \leq 9 \\ & x_2 & \geq 2 \\ x_1 & & \geq 2 \end{Bmatrix}$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{enteras}$$

Resolviendo el programa lineal 2.1

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{Bmatrix} 2x_1 + & x_2 & \leq 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & \leq 9 \\ & x_2 & \geq 2 \\ x_1 & & \leq 1 \end{Bmatrix}$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{enteras}$$

Estandarizando el programa lineal 2.1

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - Mx_7$$

$$\begin{array}{llllllll} 2x_1 + & x_2 + & x_3 & & & & & = 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & + & x_4 & & & & = 9 \\ & x_2 & & - & x_5 & & +x_7 & = 2 \\ x_1 & & & & + & x_6 & & = 1 \end{array}$$

Solucion Basica Final del programa lineal 2.1 por el metodo de tabla simplex

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
C_J		3	4	0	0	0	0	$-M$	
x_3	0	0	0	1	(1/3)	0	(1/3)	0	5/3
x_5	0	0	0	0	1/3	1	(2/3)	(1)	1/3
x_2	4	0	1	0	1/3	0	(2/3)	0	7/3
x_1	3	1	0	0	0	0	1	0	1
Z_J		3	4	0	4/3	0	1/3	0	37/3
$Z_J - C_J$		0	0	0	4/3	0	1/3	M	

Interpretacion

Funcion objetivo

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$MAX\ (z) = 12{,}33$$

Variables de Decision	Variables de Holgura	Variables superflua	Variable artificial
x_1 = 1 x_2 = 7/3	x_3 = 5/3 x_4 = 0 x_6 = 0	x_5 = 0	x_7 = 0

x_2 = 2.33, el Entero mas proximo es 2, y se encuentra 33 decimas de este entero

Acontinuacion se elige la variable de Decisión x_2

Por tanto

$$t_1 \leq x_2 \leq t_2$$

$$3 \leq x_2 \leq 2$$

Las nuevas restricciones son

$x_2 \leq 2$ y $x_2 \geq 3$

Los nuevos programas lineales acotando las nuevas restricciones son los siguientes

Programa lineal 2.1.1

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 9 \\ x_2 \ge 2 \\ x_1 \le 1 \\ x_2 \le 2 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0, \text{enteras}$$

Programa lineal 2.1.2

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 9 \\ x_2 \ge 2 \\ x_1 \le 1 \\ x_2 \ge 3 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0, \text{enteras}$$

Resolviendo el programa lineal 2.1.1

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 9 \\ x_2 \ge 2 \\ x_1 \le 1 \\ x_2 \le 2 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0, \text{enteras}$$

Estandarizando el programa lineal 2.1.1

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - 0x_7 - Mx_8$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 &= 9 \\ x_2 - x_5 + x_8 &= 2 \\ x_1 + x_6 &= 1 \\ x_2 + x_7 &= 2 \end{aligned}$$

Solucion Basica Final del programa lineal 2.1.1 por el metodo de tabla simplex

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
C_J		3	4	0	0	0	0	0	$-M$	
x_3	0	0	0	1	0	0	(2)	(1)	0	2
x_4	0	0	0	0	1	0	(2)	(3)	0	1
x_2	4	0	1	0	0	0	0	1	0	2
x_1	3	1	0	0	0	0	1	0	0	1
x_5	0	0	0	0	0	1	0	1	(1)	0
Z_J		3	4	0	0	0	3	4	0	11
$Z_J - C_J$		0	0	0	0	0	3	4	M	

Interpretacion

Funcion objetivo

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$MAX\ (z) = 11$$

Variables de Decision	Variables de Holgura	Variables superflua	Variable artificial
$x_1 = 1$	$x_3 = 2$	$x_5 = 0$	$x_7 = 0$
$x_2 = 2$	$x_4 = 1$		
	$x_6 = 0$		
	$x_7 = 0$		

La solucion basica final del programa lineal 2.1.1 lanza resultados de numeros enteros por tanto se contempla una solucion factible.

Resolviendo el programa lineal 2.1.2

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$\left\{\begin{array}{lll} 2x_1 + & x_2 & \leq 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & \leq 9 \\ & x_2 & \geq 2 \\ x_1 & & \leq 1 \\ & x_2 & \geq 3 \end{array}\right\}$$

$$x_1\ , x_2 \geq\ 0, \text{enteras}$$

Estandarizando el programa lineal 2.1.2

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - 0x_7 - Mx_8 - Mx_9$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 2x_1 + & x_2 + & x_3 & & & & & & & & = 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & + & x_4 & & & & & & & = 9 \\ & x_2 & & - & x_5 & & + & x_8 & & & = 2 \\ x_1 & & & & + & x_6 & & & & & = 1 \\ & x_2 & & & & - & x_7 & + & x_8 & & = 3 \end{array}$$

Solucion Basica Final del programa lineal 2.1.1 por el metodo de tabla simplex

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
C_J		3	4	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$	
x_3	0	0	0	1	(1)	0	0	(2)	0	2	3
x_1	3	1	0	0	1/2	0	0	3/2	0	(3/2)	0
x_2	4	0	1	0	0	0	0	(1)	0	1	3
x_6	0	0	0	0	(1/2)	0	1	(3/2)	0	3/2	1
x_5	0	0	0	0	0	1	0	(1)	(1)	1	1
Z_J		3	4	0	3/2	0	0	1/2	0	$-1/2$	12
$Z_J - C_J$		0	0	0	3/2	0	0	1/2	M	$M-1/2$	

Interpretacion

Funcion objetivo

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$MAX\ (z) = 12$$

Variables de Decision	Variables de Holgura	Variables superflua	Variable artificial
$x_1 = 0$	$x_3 = 3$	$x_5 = 1$	$x_8 = 0$
$x_2 = 3$	$x_4 = 0$	$x_7 = 0$	$x_9 = 0$
	$x_6 = 1$		

La solucion basica final del programa lineal 2.1.2 lanza resultados de numeros enteros por tanto se contempla una solucion factible.

Resolviendo el programa lineal 2.2

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{Bmatrix} 2x_1 + & x_2 & \leq 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & \leq 9 \\ & x_2 & \geq 2 \\ x_1 & & \geq 2 \end{Bmatrix}$$

$$x_1\ , x_2 \geq\ 0, \text{enteras}$$

Estandarizando el programa lineal 2.2

$$MAX\ (z) = \ 3x_1 + \ 4x_2 + \ 0x_3 + \ 0x_4 + \ 0x_5 + \ 0x_6 \ \ Mx_7 \ \ Mx_8$$

$$\begin{array}{llllllllll}
2x_1 + & x_2 + & x_3 & & & & & & & = 6 \\
2x_1 + & 3x_2 & + & x_4 & & & & & & = 9 \\
 & x_2 & & - & x_5 & + & x_7 & & & = 2 \\
x_1 & & & & - & x_6 & + & x_8 & & = 2
\end{array}$$

Solucion Basica Final del programa lineal 2.2 por el metodo de tabla simplex

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
C_J		3	4	0	0	0	0	$-M$	$-M$	
x_3	0	0	0	1	$(1/3)$	0	$4/3$	0	$(4/3)$	$1/3$
x_1	3	1	0	0	0	0	(1)	0	1	2
x_2	4	0	1	0	$1/3$	0	$2/3$	0	$(2/3)$	$5/3$
x_7	$-M$	0	0	0	$(1/3)$	(1)	$(2/3)$	1	$2/3$	$1/3$
Z_J		3	4	0	$\frac{4}{3} - M\frac{1}{3}$	M	$\frac{-1}{3} + M\frac{2}{3}$	$-M$	$\frac{1}{3} - M\frac{2}{3}$	$\frac{38}{3} - M\frac{1}{3}$
$Z_J - C_J$		0	0	0	$\frac{4}{3} - M\frac{1}{3}$	M	$\frac{-1}{3} + M\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3} + M\frac{1}{3}$	

Interpretacion

Funcion objetivo

$$MAX\ (z) = \ 3x_1 + 4x_2$$

$$MAX\ (z) = \ 12{,}66$$

Variables de Decision	Variables de Holgura	Variables superflua	Variable artificial
x_1 = 2	x_3 = 1/3	x_5 = 0	x_7 = 1/3
x_2 = 5/3	x_4 = 0	x_6 = 0	x_8 = 0

La solucion basica final del programa lineal 2.2 no es solucion factible debido a que exite variables artificiales en la solucion basica final.

VII. Desarrollo del "Algoritmo de asociación" o "Algoritmo de derivación de ramificación"

Este es un algoritmo se deriva del algoritmos de ramificación y acotamiento del cual desprende otra manera de resolución contemplando aspectos del mismo tomando en cuenta una de sus características determinar las variables de decisión.

VIII. Procedimiento de resolución por el Algoritmo de derivación de ramificación

Identificar el programa lineal a resolver teniendo en cuenta la función objetivo y las restricciones.

Estandarizar el programa lineal aplicando los costos de penalización

Resolver el programa lineal primario mediante el método simplex.

Nota

Para aplicar el algoritmo se debe tener en cuenta ciertas condiciones de solución.

En la solución básica final debe existir la presencia mínima de dos variables de decisión o más.

Estas variables no deben ser enteras sino que deben tener decimales, mismas que se deben representar en una restricción doble.

Se separan las restricciones establecidas en una sola e inmediatamente asociar una restricción del intervalo con cada una de las restricciones de los demás intervalos.

No se deben asociar las mismas restricciones de un mismo intervalo.

Una vez asociadas las restricciones integrar las mismas al programa lineal origen

Una vez formulado los programas lineales resolver los mismos de la misma manera por el método simplex.

A continuación se desarrolla de manera explícita y matemática el procedimiento de solución.

IX. Resolución del Programa lineal entero por el Algoritmo Propuesto “Algoritmo de asociación” o “Algoritmo de derivación de ramificación”

Programa lineal origen

Función objetivo

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

Restricciones

$$\begin{Bmatrix} 2x_1 + & x_2 & \leq 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & \leq 9 \end{Bmatrix}$$

$$x_1\ , x_2 \geq\ 0, \text{enteras}$$

Solución

Estandarizando el programa

$$MAX\ (z) = \quad 3x_1 + \quad 4x_2 + \quad 0x_3 + \quad 0x_4$$

$$\begin{array}{lllll} 2x_1 + & x_2 + & x_3 & & = 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & & + \quad x_4 & = 9 \end{array}$$

Solucion basica final Tabla sinplex

		x_1	x_2	x_3	x_4	
C_J		3	4	0	0	
x_1	3	1	0	$3/4$	$(1/4)$	$9/4$
x_2	4	0	1	$(1/2)$	$1/2$	$3/2$
Z_J		3	4	$1/4$	$5/4$	$51/4$
$Z_J - C_J$		0	0	$1/4$	$5/4$	

Interpretacion

Funcion objetivo

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$MAX\ (z) = 12{,}75$$

Variables de Decision			Variables de Holgura
x_1 = 9/4	$\rightarrow$	x_1 = 2,25	$x_3 = 0$
x_2 = 3/2	$\rightarrow$	x_2 = 1,5	$x_4 = 0$

x_1 = 2,25 Entero mas proximo es 2, y se encuentra 25 decimas de este entero

x_2 = 2,25 Entero mas proximo es 2, y se encuentra 5 decimas de este entero

El algoritmo propuesto es el aiguiente

Donde v_1, v_2 y t_1, t_2 son numeros enteros y se comienza a establecer las nuevas restricciones

Por parte de x_1

$$v_1 \leq x_1 \leq v_2$$

$$3 \leq x_1 \leq 2$$

Las nuevas restricciones son

$x_1 \leq 2$ y $x_1 \geq 3$

Por parte de x_2

$$t_1 \leq x_2 \leq t_2$$

$$2 \leq x_2 \leq 1$$

Las nuevas restricciones son

$x_2 \leq 1$ y $x_2 \geq 2$

Variables a asociarse

$$x_1 \leq 2 \qquad x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 3 \qquad x_2 \geq 2$$

Restricciones a combinarse

a) Restriccion 1

$$x_1 \leq 2$$
$$x_2 \leq 1$$

b) Restriccion 2

$$x_1 \leq 2$$
$$x_2 \geq 2$$

c) Restriccion 3

$$x_1 \geq 3$$
$$x_2 \leq 1$$

d) Restriccion 4

$$x_1 \geq 3$$
$$x_2 \geq 2$$

Formulacion de los nuevos programas lineales acotando las nuevas restricciones anteriormente realizadas.

Progrma lineal 1

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{Bmatrix} 2x_1 + & x_2 & \leq 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & \leq 9 \\ x_1 & & \leq 2 \\ & x_2 & \leq 1 \end{Bmatrix}$$

$$x_1\ , x_2 \geq\ 0, \text{enteras}$$

Progrma lineal 2

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{Bmatrix} 2x_1 + & x_2 & \leq 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & \leq 9 \\ x_1 & & \leq 2 \\ & x_2 & \geq 2 \end{Bmatrix}$$

$$x_1\ , x_2 \geq\ 0, \text{enteras}$$

Progrma lineal 3

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{Bmatrix} 2x_1 + & x_2 & \leq 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & \leq 9 \\ x_1 & & \geq 3 \\ & x_2 & \leq 1 \end{Bmatrix}$$

$$x_1\ , x_2 \geq\ 0, \text{enteras}$$

Progrma lineal 4

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{Bmatrix} 2x_1 + & x_2 & \leq 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & \leq 9 \\ x_1 & & \geq 3 \\ & x_2 & \geq 2 \end{Bmatrix}$$

$$x_1\ , x_2 \geq\ 0, \text{enteras}$$

Resolviendo el programa lineal 1

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{Bmatrix} 2x_1 + & x_2 & \leq 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & \leq 9 \\ x_1 & & \leq 2 \\ & x_2 & \leq 1 \end{Bmatrix}$$

$$x_1\ , x_2 \geq\ 0, \text{enteras}$$

Estandarizando el programa lineal 1

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5\ \ 0x_6$$

$$\begin{array}{llllllll} 2x_1 + & x_2 + & x_3 & & & & = 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & + & x_4 & & & = 9 \\ x_1 & & & + & x_5 & & = 2 \\ & x_2 & & & + & x_6 & = 1 \end{array}$$

Solucion Basica Final del programa lineal 1 por el metodo de tabla simplex

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
C_J		3	4	0	0	0	0	
x_3	0	0	0	1	0	(2)	(1)	1
x_4	0	0	0	0	1	(2)	(3)	2
x_1	3	1	0	0	0	1	0	2
x_2	4	0	1	0	0	0	1	1
Z_J		3	4	0	0	3	4	10
$Z_J - C_J$		0	0	0	0	0	0	

Interpretacion

Funcion objetivo

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$MAX\ (z) = 10$$

Variables de Decision	Variables de Holgura
$x_1 = 2$	$x_3 = 1$
$x_2 = 1$	$x_4 = 2$
	$x_5 = 0$
	$x_6 = 0$

La solucion basica final del programa lineal 1 lanza resultados de numeros enteros por tanto se contempla una solucion factible.

Resolviendo el programa lineal 2

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$\left\{\begin{array}{llll} 2x_1 + & x_2 & \leq 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & \leq 9 \\ x_1 & & \leq 2 \\ & x_2 & \geq 2 \end{array}\right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0, \text{enteras}$$

Estandarizando el programa lineal 2

$$MAX\ (z) = \ 3x_1 + \ 4x_2 + \ 0x_3 + \ 0x_4 + \ 0x_5 + \ 0x_6 - \ Mx_7$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
2x_1 + & x_2 + & x_3 & & & & & = 6 \\
2x_1 + & 3x_2 & + & x_4 & & & & = 9 \\
x_1 & & & + & x_5 & & & = 2 \\
& x_2 & & & - & x_6 & +x_7 & = 2
\end{array}$$

Solucion Basica Final del programa lineal 2 por el metodo de tabla simplex

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
C_J		3	4	0	0	0	0	$-M$	
x_3	0	0	0	1	(1)	0	(2)	2	1
x_1	3	1	0	0	1/2	0	3/2	(3/2)	3/2
x_5	0	0	0	0	(1/2)	1	(3/2)	3/2	1/2
x_2	4	0	1	0	0	0	(1)	1	2
Z_J		3	4	0	3/2	0	1/2	(1/2)	25/2
$Z_J - C_J$		0	0	0	3/2	0	1/2	$\left(\frac{1}{2}\right) + M$	

Interpretacion

Funcion objetivo

$$MAX\ (z) = \ 3x_1 + 4x_2$$

$$MAX\ (z) = \ 12{,}5$$

Variables de Decision	Variables de Holgura	Variables superflua	Variable artificial
x_1 = 3/2 x_2 = 2	x_3 = 1 x_4 = 0 x_5 = 1/2	x_6 = 0	x_7 = 0

La solucion basica final del programa lineal 2 no contempla soluciones enteras por lo cual se debe seguir el procedimiento de ramificacion.

Resolviendo el programa lineal 3

$$MAX\ (z) = \ 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + & x_2 & \leq 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & \leq 9 \\ x_1 & & \geq 3 \\ & x_2 & \leq 1 \end{cases}$$

$$x_1\ , x_2 \geq \ 0, \text{enteras}$$

Estandarizando el programa lineal 3

$$MAX\ (z) = \quad 3x_1 + \quad 4x_2 + \quad 0x_3 + \quad 0x_4 + \quad 0x_5 + \quad 0x_6 - \quad Mx_7$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 + & x_2 + & x_3 & & & & & & = 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & + & x_4 & & & & & = 9 \\ x_1 & & & - & x_5 & + & & x_7 & = 3 \\ & x_2 & & & + & x_6 & & & = 1 \end{array}$$

Solucion Basica Final del programa lineal 3 por el metodo de tabla simplex

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
C_J		3	4	0	0	0	0	$-M$	
x_2	4	0	1	1	0	2	0	(2)	0
x_4	0	0	0	(3)	1	(4)	0	4	3
x_1	3	1	0	0	0	(1)	0	1	3
x_6	3	0	0	(1)	0	(2)	1	2	1
Z_J		3	4	4	0	5	0	(5)	9
$Z_J - C_J$		0	0	4	0	5	0	$(5) + M$	

Interpretacion

Funcion objetivo

$$MAX\ (z) = \ 3x_1 + 4x_2$$

$$MAX\ (z) = \ 9$$

Variables de Decision	Variables de Holgura	Variables superflua	Variable artificial
x_1 = 3 x_2 = 0	x_3 = 0 x_4 = 3 x_6 = 1	x_5 = 0	x_7 = 0

La solucion basica final del programa lineal 3 lanza resultados de numeros enteros por tanto se contempla una solucion factible.

Resolviendo el programa lineal 4

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$\left\{\begin{array}{lll} 2x_1 + & x_2 & \leq 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & \leq 9 \\ x_1 & & \geq 3 \\ & x_2 & \geq 2 \end{array}\right\}$$

$$x_1\ , x_2 \geq\ 0, \text{enteras}$$

Estandarizando el programa lineal 4

$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - Mx_7 - Mx_8$$

$$\begin{array}{cccccccccc} 2x_1 + & x_2 + & x_3 & & & & & & & = 6 \\ 2x_1 + & 3x_2 & + & x_4 & & & & & & = 9 \\ x_1 & & & - & x_5 & + & x_7 & & & = 3 \\ & x_2 & & & - & x_6 & + & x_8 & & = 2 \end{array}$$

Solucion Basica Final del programa lineal 4 por el metodo de tabla simplex

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
C_J		3	4	0	0	0	0	$-M$	$-M$	
x_8	$-M$	0	0	$1/2$	$(1/2)$	0	(1)	0	1	$1/2$
x_1	3	1	0	$3/4$	$(1/4)$	0	0	0	0	$9/4$
x_7	$-M$	0		$(3/4)$	$1/4$	(1)	0	1	0	$3/4$
x_2	4	0	1	$(1/2)$	$1/2$	0	0	0	0	$3/2$
Z_J		3	4	$\frac{1}{4} + M\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4} + M\frac{1}{4}$	M	M	$-M$	$-M$	$\frac{51}{4} - M\frac{5}{4}$
$Z_J - C_J$		0	0	$\frac{1}{4} + M\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4} + M\frac{1}{4}$	M	M	0	0	

Interpretacion

Funcion objetivo

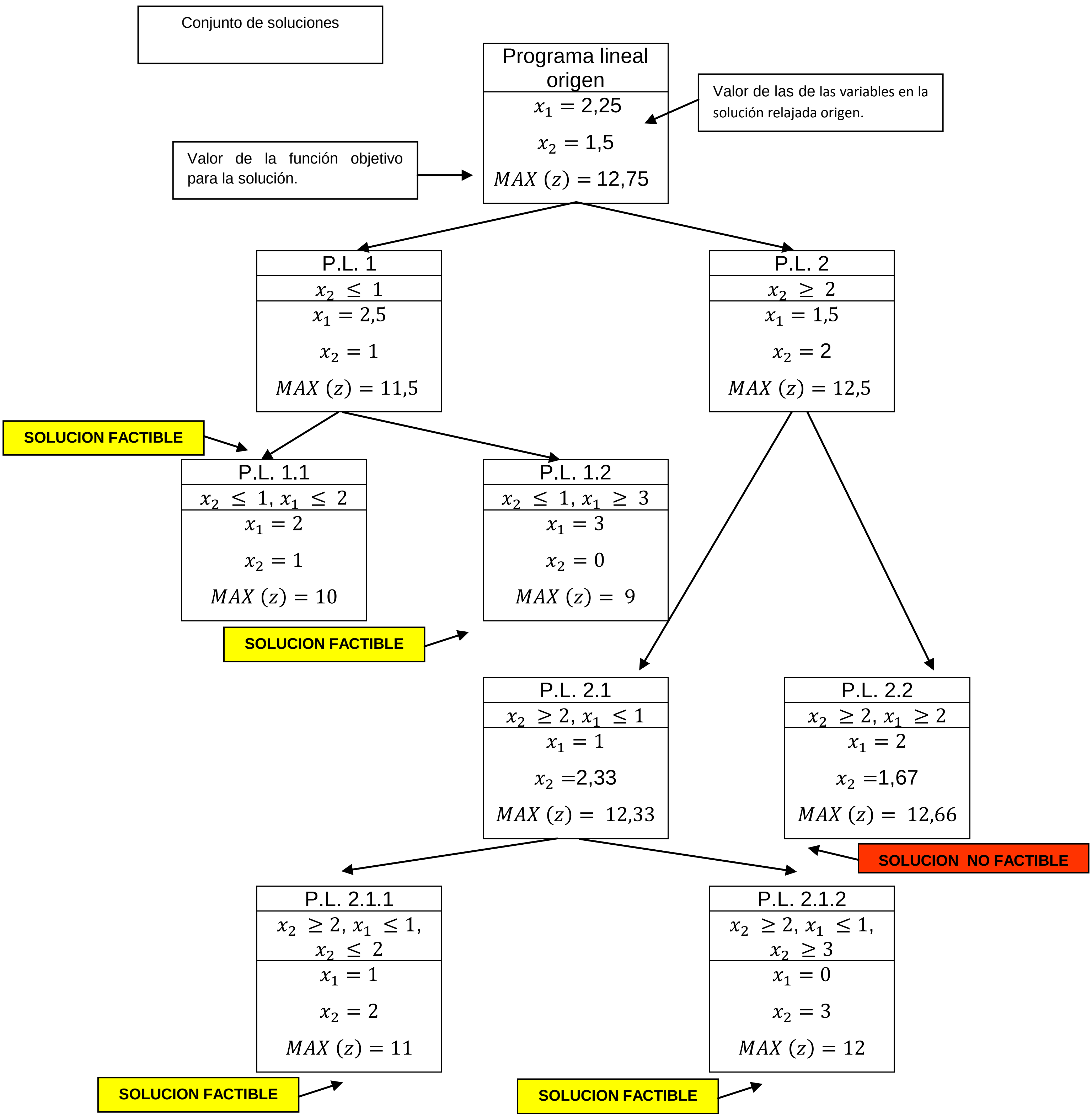
$$MAX\ (z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$MAX\ (z) = 12{,}75$$

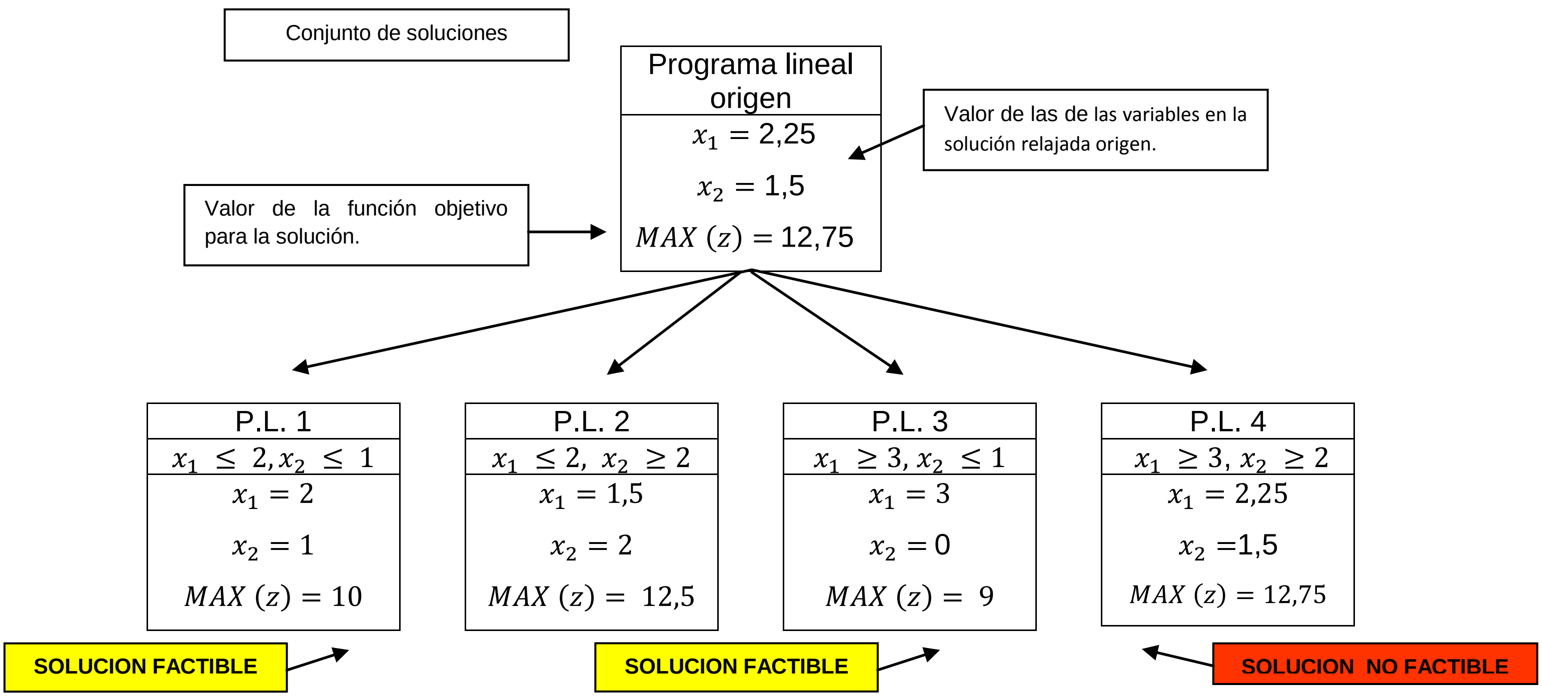
Variables de Decision	Variables de Holgura	Variables superflua	Variable artificial
x_1 = 9/4	x_3 = 0	x_5 = 0	x_7 = 3/4
x_2 = 3/2	x_4 = 0	x_6 = 0	x_8 = 1/2

La solucion basica final del programa lineal 4 no es factible debido a que exite soluciones artificiales en el progrmama.

X. Árbol de soluciones del problema resuelto por el “Algoritmo de Ramificación y Acotamiento”



XI. Árbol de soluciones del problema resuelto por el “Algoritmo de asociación” o “Algoritmo de derivación de ramificación”



XII. Análisis comparativo entre el algoritmo de Ramificación y Acotamiento y el Algoritmo de Asociación

Sencillamente el método propuesto determina un camino corto en encontrar las soluciones óptimas tras la solución, evitando resolver la ramificación que el algoritmo de ramificación y acotamiento propone.

El árbol de soluciones en ambos métodos se ve presente por lo cual en el método propuesto se hallan de manera, pero al reducir el procedimiento también se reduce las posibilidades de soluciones factibles.

XIII. Aplicación practica

Su aplicación tiene un gran impacto en la gestión de empresas. Este modelo produce resultados relevantes en términos de costo y tiempo que deben permitir el análisis La aplicación práctica del “algoritmo de combinación” o “algoritmo de derivación de ramificación" plantea mejorar la eficiencia, eficacia y efectividad de las operaciones de inversión pública del país, producción, distribución y asignación de recursos, en la administración y gestión de las empresas.

XIV. Conclusiones

Cabe resaltar que los programas lineales deben analizar nuevas formas de desarrollar y resolver los mismos que se pueden sintetizar y sistematizar el procedimiento aun más corto y eficiente.

XV. Recomendaciones

Se pone a consideración realizar las críticas correspondientes e incluir más valor al algoritmo propuesto en términos de procedimientos matemáticos y validar más su aplicación

Referencias bibliográficas

Anderson S., Williams M., (2008). *An introduction to management science quantitative approaches to decision making,* Thomson Learning, United States of America, pp. 30-89, pp. 159-189.

Bazaraa M., J. Jarvis, H. Sherali, (2010). *Linear programming and network flows*, Third edition, John Wiley & Sons, United States of America, pp. 1-27, pp. 201-233.

Dorfman R., P. Samuelson, R. Solow, (1986). *Programming and economic analysis*, McGraw Hill, New York, United States of America.

Eppen G., F. Gould, C. Schimidt, J. Moore, L. Weatherford, (2000), *Management science*, Pretince - Hall, New Jersey, United States of America.

Izar J., (1996). *Fundamentos de investigación de operaciones para administración*, Universidad Autónoma de San Luis Potosí, México, pp. 11-13, pp. 42-62.

Haeussler E., Paul R., (2003). *Matemática para administración y economía*, Decima edición, Prentice Hall, México, pp. 301-366.

López R., (1977). *Programación lineal y decisiones económicas*, Primera edición, Universidad Católica Andrés Bello, Caracas, Venezuela, pp. 11-22, pp. 37-69.

Maroto, C., J. Alcaraz Soria, R. Ruiz García, (2002). *Investigación operativa Modelos y técnicas de Optimización*, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España.

Serra D., (2000). *Métodos cuantitativos para la toma de decisiones*, Gestión 2000, España, pp. 11-19.

Tamayo, M. (2004). *El proceso de la Investigación científica*, Cuarta edición, Limusa, México.

Thie P., G. Keough, (2008). *An introduction to linear programming and game theory, Third edition,* John Wiley & Sons, United States of America, pp. 211-250.